

TRANSFERT THERMIQUE INSTATIONNAIRE EN ECOULEMENT LAMINAIRE A L'ENTRÉE DES TUBES CIRCULAIRES

TA PHUOC LOC

Centre de Calcul Analogique, 91-Orsay, France

(Reçu le 27 février 1970)

Résumé—Une méthode d'étude et de simulation du phénomène de transfert thermique instationnaire à l'entrée des tubes circulaires est proposée. Elle permet le traitement des équations dynamiques non linéaires et des équations d'énergie dans lesquelles l'épaisseur du tube ainsi que la conduction axiale du fluide sont prises en compte. Elle est basée sur trois procédés de calcul différents: la méthode numérique dont la stabilité du processus est démontrée, donne une solution exacte des équations dynamiques, les deux méthodes de calcul analogique par réseau d'impédances et par courant continu permettent la simulation des équations d'énergie. Elle rend ainsi possible l'analyse des problèmes de transfert même dans les cas où le nombre de Prandtl est faible ($< 0,5$) et le nombre de Péclet inférieur à 100.

NOMENCLATURE

$x, r,$	coordonnées axiale et radiale;
$a_i,$	rayon intérieur du tube;
$a_{ex},$	rayon extérieur du tube;
$K_\theta,$	conductivité thermique du fluide;
$K_T,$	conductivité thermique du tube;
$c_\theta,$	chaleur spécifique du fluide;
$c_T,$	chaleur spécifique du tube;
$\rho_\theta,$	densité du fluide;
$\rho_T,$	densité du tube;
$u,$	vitesse axiale;
$v,$	vitesse radiale;
$U_0,$	vitesse axiale à l'entrée du tube;
$p,$	pression;
$\theta,$	température du fluide;
$T,$	température du tube;
$Nu,$	nombre de Nusselt;
$Re,$	nombre de Reynolds;
$Pr,$	nombre de Prandtl;
$Pe,$	nombre de Péclet.

auteurs. Dans ces travaux on s'intéresse en général au régime stationnaire. Des solutions analytiques approchées ou numériques ont été proposées dans [1-4]. Cependant dans ces études, le phénomène de conduction axiale du fluide est souvent négligé devant celui de la conduction radiale et de la convection forcée; ce qui ne doit pas être le cas des métaux liquides dont l'emploi est très apprécié en énergie nucléaire et dans le domaine aérospatial. En effet on est en présence des cas où le nombre de Prandtl est faible ($< 0,5$), la conduction axiale est aussi importante que la conduction radiale et la convection forcée.

Nous proposons dans cet article d'exposer une méthode d'étude du régime stationnaire et instationnaire du même problème dans le cas où la conductivité thermique du tube n'est plus supposée infinie et que la conduction axiale du fluide n'est plus négligeable.

INTRODUCTION

L'ÉTUDE du phénomène de transfert thermique en écoulement laminaire, à l'entrée des tubes circulaires a été déjà abordée par plusieurs

EQUATIONS

Equations du mouvement

Les équations dynamiques, dans le cas d'un écoulement laminaire de fluide visqueux à

l'intérieur d'un tube circulaire s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \\ = -\frac{g}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \\ + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

$$2\pi \int_0^{a_i} ru \, dr = \pi a_i^2 U_o. \quad (3)$$

Dans ce travail on va supposer que l'écoulement en amont du fluide est un écoulement parallèle de vitesse constante U_o , que les propriétés physiques du fluide (viscosité, densité, conductivité, chaleur spécifique) sont indépendantes de la température. On négligera aussi le terme $v(\partial^2 u / \partial x^2)$ devant les autres. Dans ces conditions les équations (1)-(3) seront, pour le régime stationnaire

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{g}{\rho} \frac{dp}{dx} + v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \quad (1')$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (2')$$

$$2\pi \int_0^{a_i} ru \, dr = \pi a_i^2 U_o. \quad (3')$$

Equations d'énergie

Comme il a été démontré par Singh [5], dans les cas où le nombre de Prandtl est faible et le nombre de Péclet inférieur à 100 la conduction axiale du fluide n'est plus négligeable, par conséquent les équations d'énergie s'écrivent :

pour le fluide

$$\begin{aligned} c_{\theta} \rho_{\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \\ = K_{\theta} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

on néglige le terme d'énergie de frottement :
pour le tube

$$c_T \rho_T \frac{\partial T}{\partial t} = K_T \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right]. \quad (5)$$

Comme pour le fluide, on suppose les propriétés physiques du matériau constituant le tube indépendantes de la température.

Equations sans dimension

On pose

$$u^* = \frac{u}{U_o} \quad v^* = \frac{v}{U_o} \quad F_o = \frac{t}{(c_T \rho_T / a_i^2 K_T)}$$

$$x^* = \frac{x}{a_i} \quad r^* = \frac{r}{a_i}$$

$$p^* = \frac{pg}{\rho U_o^2} \quad Re = \frac{U_o a_i}{\nu} \quad \beta = \frac{c_{\theta} \rho_{\theta} / K_{\theta}}{c_T \rho_T / K_T}$$

Les équations (1'), (2'), (3'), (4), (5), deviendront :

$$\begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} \\ + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{v^*}{r^*} + \frac{\partial v^*}{\partial r^*} = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^1 r^* u^* \, dr^* = 0,5 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial \theta^*}{\partial F_o} + Re Pr \left(u^* \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right) \\ = \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial F_o} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right). \quad (10)$$

Les conditions aux limites seront :

$$\begin{aligned} x^* \geq 0 \begin{cases} u^* = v^* = 0 & \text{pour } r^* = 1 \\ \frac{\partial u^*}{\partial r^*} = v^* = 0 & \text{pour } r^* = 0 \end{cases} \\ x^* = 0 \quad 0 \leq r^* < 1 \quad u^* = 1 \quad v^* = 0 \end{aligned}$$

$$x^* \geq 0 \quad r^* = 0 \quad \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = 0$$

$$x^* \geq 0 \quad \begin{cases} K_\theta \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = K_T \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \\ r^* = 1 \quad \left[T^* = \theta^* \left[\text{ou } K_\theta \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = \alpha (\theta^* - T^*) \right] \right. \end{cases}$$

Conditions initiales: $F_0 = 0$

$$x^* \geq 0 \quad T^* = T^0(x^*, r^*) \quad \text{pour} \quad 1 \leq r^* < \frac{a_{ex}}{a_i}$$

$$T^* = T_p \quad \text{pour} \quad r^* = \frac{a_{ex}}{a_i}$$

$$x^* \geq 0 \quad \theta^* = \theta^0(x^*, r^*) \quad \text{pour} \quad 0 \leq r^* < 1.$$

Les conditions aux limites pour $x \rightarrow \infty$ peuvent être suivent le cas déterminées avec l'hypothèse qu'à l'infini le profil de température du présent problème confond avec celui où on suppose la conduction axiale négligeable. D'autres types de conditions sont aussi proposés dans [12]; on adopte dans cet article la condition

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} = \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0 \quad \text{pour} \quad x^* = L \quad 0 \leq a_{ex}/a_i$$

METHODE PROPOSEE

Calcul du profil de vitesse

Les équations (6)-(8) sont du type couche limite laminaire. Des solutions approchées ont été données par Boussinesq [6], Schiller [7], Atkinson-Goldstein [8] et Schlichting [9]. En 1941 Langhaar [11] proposa une solution approchée basée sur une linéarisation de l'équation de Navier-Stokes. Il démontre que dans le cas d'un cylindre à section circulaire la vitesse axiale u^* peut s'écrire:

$$u^* = \frac{I_0(\gamma) - I_0(\gamma_q)}{I_2(\gamma)}$$

I_0 et I_2 sont des fonctions de Bessel modifiées

d'ordre 0 et 2. Les détails de calcul sont donnés dans la référence [11].

On remarque que dans sa méthode de linéarisation, Langhaar a négligé le terme $v^*(\partial u^*/\partial r^*)$. On propose dans cet article une solution exacte des équations (6)-(8) par une méthode semi-implicite.

On est en présence d'un système d'équations dont les inconnues ne peuvent être explicitées. Sous forme de différences finies, les équations (6) et (7) s'écrivent:

$$u_{i-1,j}^* \frac{u_{i,j}^* - u_{i-1,j}^*}{\Delta x^*} + v_{i,j}^* \frac{u_{i,j+1}^* - u_{i,j-1}^*}{2\Delta r^*} = -\frac{p_i^* - p_{i-1}^*}{\Delta x^*} + \frac{1}{Re(\Delta r^*)^2} \left[\frac{r_{i,j+\frac{1}{2}}^*}{r_{ij}^*} \times (u_{i,j+1}^* - u_{ij}^*) + \frac{r_{i,j-\frac{1}{2}}^*}{r_{ij}^*} (u_{i,j-1}^* - u_{ij}^*) \right] \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta x^*} (u_{i,j-1}^* - u_{i-1,j-1}^* + u_{ij}^* - u_{i-1,j}^*) + \frac{r_{ij}^* v_{ij}^* - r_{i,j-1}^* v_{i,j-1}^*}{\Delta r^*} = 0. \quad (12)$$

On démontre dans l'annexe I que la stabilité du schéma de différences finies dépend uniquement de v_{ij}^* et Δr^* . La démonstration est basée sur le calcul de la matrice d'amplification et sur l'application du théorème d'équivalence de Lax et la condition de stabilité de von Neumann.

Dans l'étude de la stabilité on a supposé que dp^*/dx^* reste bornée quelle que soit la valeur de x^* . Avec cette hypothèse comme dans le processus numérique on ne peut pas expliciter les p_i^* , on propose d'ajouter à p_i^* , à chaque itération le résidu de l'intégrale $\int_0^1 r^* u^* dr^*$ qui doit être égale à 0,5, affecté d'un coefficient approprié. L'organigramme peut se résumer de la façon suivante

(a) on se donne des valeurs intermédiaires \tilde{p}_i^* et \tilde{v}_{ij}^* pour calculer les valeurs de u_{ij}^* par la méthode de Gauss-Seidel ou desurrelaxation.

(b) à partir des valeurs de u_{ij}^* obtenues, on

utilise un sous programme d'intégration pour calculer l'intégrale $\int_0^1 r^* u^* dr^* = 0,5$. Si l'intégrale

n'est pas vérifiée on change les \bar{p}_i^* , et on recommence le cycle d'itération de calcul de u_{ij}^* , $\int_0^1 r^* u^* dr^*$ jusqu'au moment où on ait $\int_0^1 r^* u^* dr^* - 0,5 = 0$.

(c) on calcule maintenant v_{ij}^* par l'intermédiaire de l'équation (12) on compare v_{ij}^* à \bar{v}_{ij}^* , si $v_{ij}^* = \bar{v}_{ij}^*$ on arrête le calcul et on passe à l'état $i + 1$, sinon on fait $\bar{v}_{ij}^* = v_{ij}^*$ et on recommence le cycle de calcul pour u_{ij}^* .

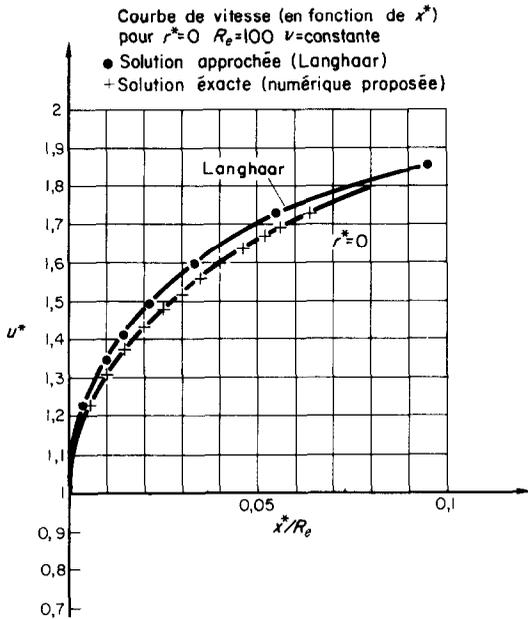


FIG. 1.

Les résultats obtenus sont représentés par les Figs. 1 et 2 et comparés à ceux obtenus par la méthode approchée de Langhaar et à ceux observés expérimentalement par Nikuradse [10]. On remarquera que les résultats obtenus se rapprochent plus des résultats expérimentaux de Nikuradse que de ceux de Langhaar. Cependant on observe une certaine différence

assez importante autour du point $x^* = 0, r^* = 1$. Cette différence peut s'expliquer par l'existence du point singulier en $x^* = 0, r^* = 1$ dans la formulation mathématique du problème.

Le calcul a été fait sur Univac 1108; on a pris $\Delta r^* = 0,01$ et Δx^* variable.

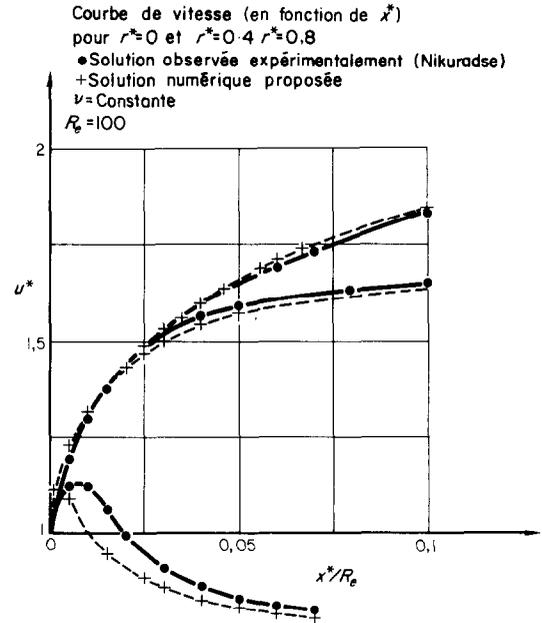


FIG. 2.

Calcul du profil de température en régime stationnaire

Le profil de vitesse étant obtenu par la méthode numérique proposée, la simulation des équations d'énergie se fera par une méthode analogique couplée. Cette méthode et ses variantes ont été utilisées pour l'étude des phénomènes de conduction non linéaires en régime instationnaire, dans les milieux homogènes [13] ou hétérogènes zonés [14] et des phénomènes de convection forcée en régime turbulent [15] ou laminaire établi [16]. On va rappeler rapidement ici cette méthode. Pour cela on doit mettre les équations d'énergie sous forme de différences finies (13) et (14). Pour un maillage non régulier en x^* et en supprimant le

terme temps on a :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta x_+^* (\Delta x_-^* + \Delta x_+^*)} (\theta_{i+1,j}^* - \theta_{ij}^*) \\ & + \frac{2}{\Delta x_-^* (\Delta x_-^* + \Delta x_+^*)} (\theta_{i-1,j}^* - \theta_{ij}^*) \\ & + \frac{r_{i,j+\frac{1}{2}}^*}{r_{ij}^*} \times \frac{\theta_{i,j+1}^* - \theta_{ij}^*}{(\Delta r^*)^2} + \frac{r_{i,j-\frac{1}{2}}^*}{r_{ij}^*} \\ & \times \frac{\theta_{i,j-1}^* - \theta_{ij}^*}{(\Delta r^*)^2} = RePr \left\{ u_{ij}^* \frac{1}{\Delta x_-^* + \Delta x_+^*} \right. \\ & \times \left[\frac{\Delta x_-^*}{\Delta x_+^*} (\theta_{i+1,j}^* - \theta_{ij}^*) - \frac{\Delta x_+^*}{\Delta x_-^*} (\theta_{i-1,j}^* - \theta_{ij}^*) \right] \\ & \left. + v_{ij}^* \frac{\theta_{i,j+1}^* - \theta_{i,j-1}^*}{2\Delta r^*} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta x_+^* (\Delta x_-^* + \Delta x_+^*)} (T_{i+1,j}^* - T_{ij}^*) \\ & + \frac{2}{\Delta x_-^* (\Delta x_-^* + \Delta x_+^*)} (T_{i-1,j}^* - T_{ij}^*) \\ & + \frac{r_{i,j+\frac{1}{2}}^* T_{i,j+1}^* - T_{ij}^*}{r_{ij}^* (\Delta r^*)^2} \\ & + \frac{r_{i,j-\frac{1}{2}}^* T_{i,j-1}^* - T_{ij}^*}{r_{ij}^* (\Delta r^*)^2} = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

On considère maintenant deux réseaux électriques l'un simulant T^* , l'autre θ^* . L'équation de Kirchoff écrite aux noeuds ij de T^* et de θ^* donne :

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i+1,j}^* - T_{ij}^*}{R_{i+1,j}} + \frac{T_{i-1,j}^* - T_{ij}^*}{R_{i-1,j}} \\ & + \frac{T_{i,j+1}^* - T_{ij}^*}{R_{i,j+1}} + \frac{T_{i,j-1}^* - T_{ij}^*}{R_{i,j-1}} = 0, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\theta_{i+1,j}^* - \theta_{ij}^*}{R'_{i+1,j}} + \frac{\theta_{i-1,j}^* - \theta_{ij}^*}{R'_{i-1,j}} + \frac{\theta_{i,j+1}^* - \theta_{ij}^*}{R'_{i,j+1}} \\ & + \frac{\theta_{i,j-1}^* - \theta_{ij}^*}{R'_{i,j-1}} + \frac{\bar{\theta}_{ij} - \theta_{ij}^*}{R_{ij}^*} = 0. \quad (16) \end{aligned}$$

Les valeurs de R_{ij} , R'_{ij} et R_{ij}^* ainsi que $\bar{\theta}_{ij}$ sont calculées d'après l'Annexe II. $\bar{\theta}_{ij}$ est calculé par le calculateur analogique à courant continu. La liaison du réseau de résistances avec le

calculateur à courant continu se fait par la méthode de compensation de charge. La Fig. 3 montre le schéma du montage électronique en chaque noeud ij de θ^* .

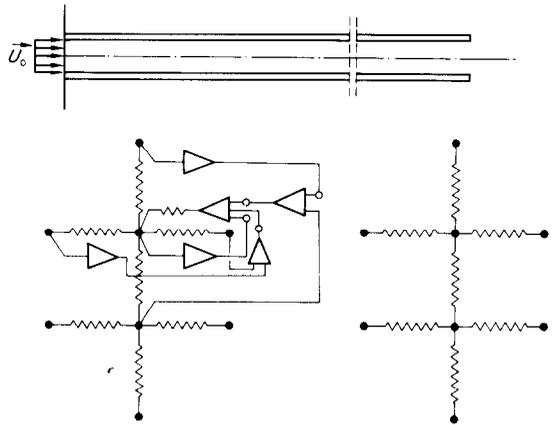


FIG. 3.

Le régime stationnaire a été étudié pour les cas suivants :

(a) La température de la paroi externe du tube

Cas stationnaire
 ● Résultats analogiques
 + Résultats numériques
 $u^* = f(x^*, r^*)$

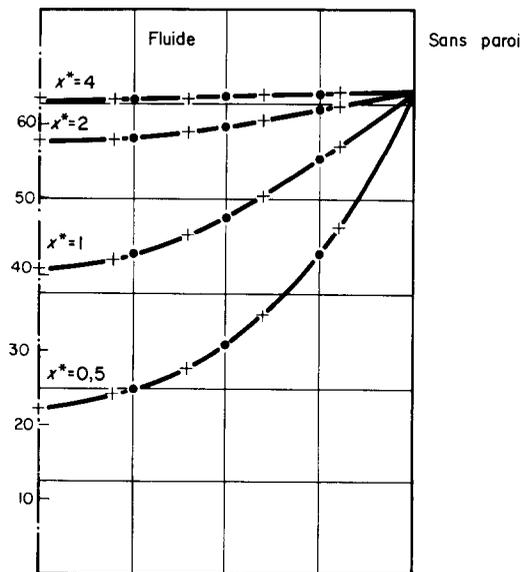


FIG. 4.

étant supposée constante, la conductivité thermique infinie, on étudie les profils de température correspondants aux cas où u^* constante v^* nulle et où u^*, v^* prenant les valeurs précédemment calculées.

(b) La température de la paroi externe du tube est toujours supposée constante alors que la conductivité thermique est finie, les mêmes cas de profils de vitesse sont considérés.

Les résultats obtenus, présentés aux Figs. 4 et 5 sont comparés à ceux découlant d'un traitement par une méthode purement numérique.

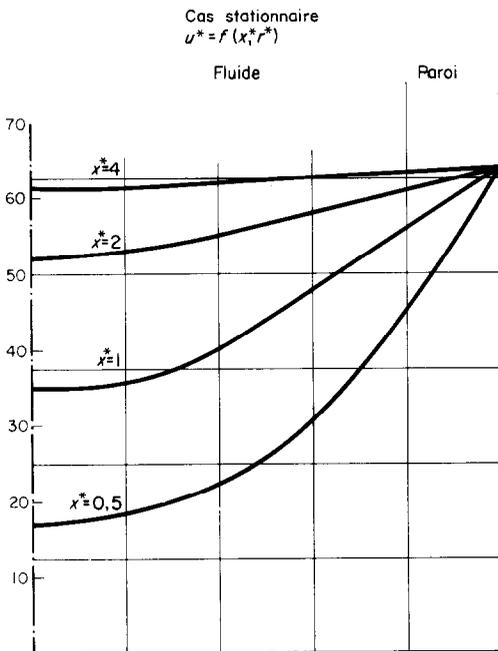


FIG. 5.

La comparaison est satisfaisante car l'erreur entre les deux résultats est inférieure à 1 pour cent. On peut constater que la prise en compte de la conductivité thermique par conséquent de l'épaisseur du tube modifie la valeur du gradient de température du fluide à la paroi, surtout aux sections qui sont situées près de la section d'entrée.

Simulation du profil de température en régime instationnaire

Dans un précédent travail [16] on a étudié l'échange thermique transitoire en supposant le profil de vitesse parabolique c'est à dire en se plaçant loin de la zone de transition. Dans cet article on se propose d'étudier l'échange thermique instationnaire dans cette zone de transition.

Ecrivons les équations (9) et (10) sous forme de systèmes d'équations différentielles du premier ordre :

$$\beta \frac{d\theta_{ij}^*}{dF_0} = \sum_{m,n} \delta'_{mn} (\theta_{mn}^* - \theta_{ij}^*) + RePr \left\{ -v_{ij}^* \frac{\theta_{i,j+1}^* - \theta_{i,j-1}^*}{2\Delta r^*} - u_{ij}^* \frac{1}{\Delta x_-^* + \Delta x_+^*} \left[\frac{\Delta x_-^* (\theta_{i+1}^* - \theta_{ij}^*)}{\Delta x_+^*} - \frac{\Delta x_+^* (\theta_{i-1,j}^* - \theta_{ij}^*)}{\Delta x_-^*} \right] \right\} \quad (17)$$

$$\frac{dT_{ij}^*}{dF_0} = \sum_{m,n} \delta_{mn} (T_{mn}^* - T_{ij}^*) \quad (18)$$

La simulation du système d'équations différentielles (18) peut être réalisée par l'utilisation d'un réseau de résistances et de condensateurs. Il n'en n'est pas de même pour le système d'équations (17) à cause de la présence du terme

$$RePr \left\{ -v_{ij}^* \frac{\theta_{i,j+1}^* - \theta_{i,j-1}^*}{2\Delta r^*} - u_{ij}^* \frac{1}{\Delta x_-^* + \Delta x_+^*} \times \left[\frac{\Delta x_-^*}{\Delta x_+^*} (\theta_{i+1,j}^* - \theta_{ij}^*) - \frac{\Delta x_+^*}{\Delta x_-^*} (\theta_{i-1,j}^* - \theta_{ij}^*) \right] \right\}$$

Comme ce terme doit être calculé et injecté au réseau à tout instant, l'utilisation d'un calculateur analogique a courant continu est nécessaire. L'intérêt de la méthode réside dans l'intégration continue de la variable temps des systèmes (17) et (18). En effet comme il a été démontré par Makinson [17], la présente méthode donne une précision meilleure que celle où on discrétise les variables d'espace et temps.

L'équation de Kirchof s'écrit pour ces réseaux de la Fig. 6

$$C_{ij} \frac{dT_{ij}^*}{dt_a} = \sum_{mn} \frac{T_{mn}^* - T_{ij}^*}{R_{mn}}$$

$$C_{ij} \frac{d\theta_{ij}^*}{dt_a} = \sum_{mn} \frac{\theta_{mn}^* - \theta_{ij}^*}{R'_{mn}} + \frac{\bar{\theta}_{ij} - \theta_{ij}^*}{R''_{ij}}$$

Le calcul de C_{ij} , C'_{ij} , R_{ij} , R'_{ij} et $\bar{\theta}_{ij}$ est donné dans l'annexe II. A partir de $x^* = 0,5$ on peut négliger le terme $v^* \partial\theta^*/\partial r^*$ et remplacer le réseau simulant θ^* de la Fig. 6 par celui de la

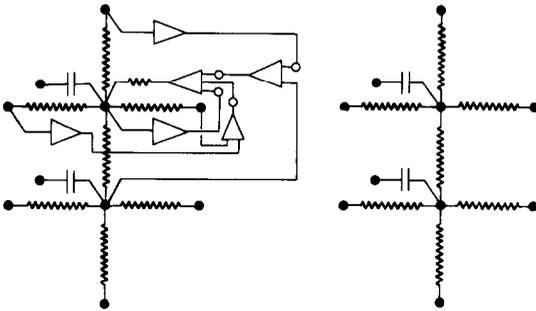


FIG. 6.

Fig. 7 on économise ainsi un certain nombre d'amplificateurs. Les cas suivants ont été simulés

(a) la température du fluide et du tube uniforme initialement on provoque un changement brusque de la température de la paroi

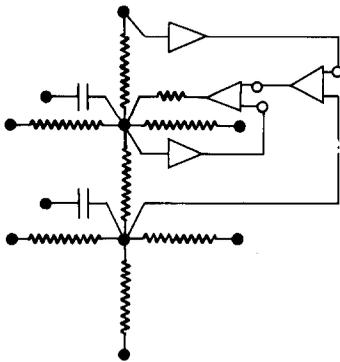


FIG. 7.

externe du tube et on observe l'évolution du profil de température du fluide et du tube en fonction du temps. Cette étude permet outre la connaissance de l'état thermique du fluide et du tube, le calcul des contraintes thermiques et des coefficients de transfert lors des démarrages des systèmes de transfert thermique.

(b) On considère maintenant le cas où l'état thermique initial du système soit celui qui satisfait aux équations (9) et (10) sans le terme temps. On provoque un changement brusque de la température d'entrée du fluide ou celle de la paroi externe du tube. Cette étude du passage d'un état stationnaire à un autre permet

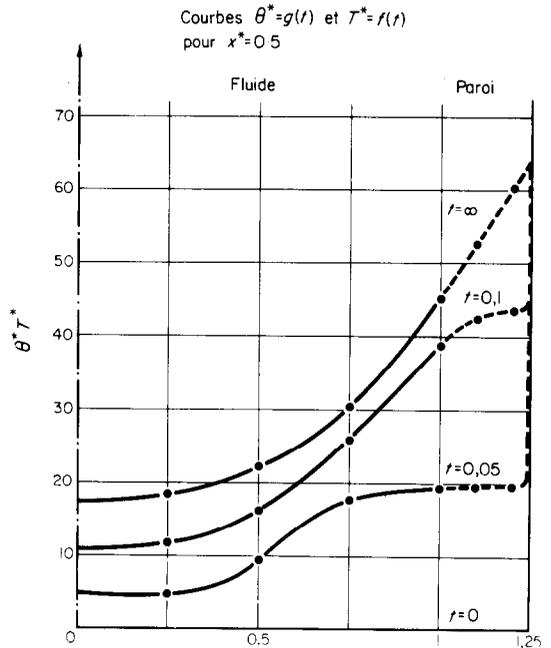


FIG. 8.

d'obtenir les mêmes renseignements concernant les contraintes thermiques et les coefficients de transfert lors des changements de puissance de fonctionnement des systèmes thermiques.

Ces études qui s'intéressent plus aux effets locaux que globaux permettent, grâce à la prise en compte de l'épaisseur du tube, prévoir les cas possibles de fissures du tube par effets

thermoelastiques. Les résultats obtenus sont présentés aux Figs. 8 et 9.

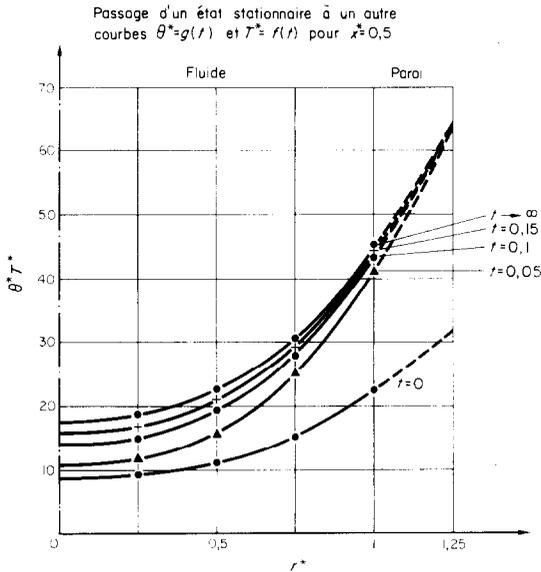


FIG. 9.

CONCLUSION

On a présenté une méthode d'étude et de simulation des problèmes de transfert thermique instationnaire permettant une représentation complète des phénomènes de convection et de conduction axiale et radiale. On a mis en évidence l'intérêt d'une utilisation combinée des méthodes analogiques et numérique. En effet la méthode analogique est bien adaptée aux problèmes linéaires transitoires, son temps de calcul réel ou accéléré rend son utilisation intéressante dans le contrôle optimal des systèmes physiques multidimensionnels.

REFERENCES

1. D. L. ULRICHSON and R. A. SCHMITZ, Laminar flow heat transfer in the entrance region of circular tubes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 253-258 (1965).

2. R. MANOHAR, Analysis of laminar flow heat transfer in the entrance region of the circular tube, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 15-22 (1969).

3. R. K. McMORDIE and A. F. EMERY, A numerical solution for laminar flow heat transfer in circular tubes with axial conduction and developing thermal and velocity fields, *J. Heat Transfer* **89C**, 11-15 (1967).

4. M. SOLIMAN and P. CHAMBRE, On the time dependant convective heat transfer in fluids with vanishing Prandtl number, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 1221-1230 (1969).

5. S. N. SINGH, Heat transfer by laminar flow in a cylindrical tube, *Appl. Sci. Res.* **7A**, 325-340 (1958).

6. J. BOUSSINESQ, Hydrodynamique, *Compt. Rend.* **110**, 1160-1238 (1890).

7. L. SCHILLER, Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung und ihre Bedeutung für Zähigkeitsmessungen, *Z. Angew. Math. Mech.* **2**, 96 (1922).

8. S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, p. 304. McGraw-Hill, New York (1938).

9. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, 4th edn. McGraw-Hill, New York (1960).

10. J. NIKURADSE, *Applied Hydro- and Aeromechanics*, edited by PRANDTL and TIETJENS. McGraw-Hill, New York (1934).

11. H. L. LANGHAAR, Steady flow in the transition length of a straight tube, *J. Appl. Mech.* **9A**, 55-58 (1942).

12. A. D. GOSMAN, W. M. PUN, A. K. RUNCAL, D. B. SPALDING and M. WOLFSHTEIN, *Heat and Mass Transfer in Circulating Flows*. Academic Press, London and New York (1969).

13. G. RENARD et TA PHUOC LOC, Résolution de l'équation de diffusion non linéaire par l'emploi de réseaux actifs couplés à un calculateur analogique à courant continu, *C. R. Acad. Sci. Paris T.266*, 73-76 (Janvier 1968).

14. TA PHUOC LOC, Simulation analogique d'équations de diffusion non linéaire en régime transitoire, *Ann. Assoc. Calcul Analog.* 142-149 (Juillet 1969).

15. TA PHUOC LOC, Une méthode de simulation d'un régénérateur thermique par couplage d'un réseau actif avec un calculateur analogique électronique, *C.R. Acad. Sci. Paris T.266*, 499-501 (Février 1968).

16. G. RENARD et TA PHUOC LOC, Simulation analogique associée des échangeurs thermiques annulaires épais, *Symp. Int. Calc. Analog. Hybr. Appl. Energ. Nucl.*, Versailles (September 1968).

17. G. J. MAKINSON, Stable high order implicit methods for the numerical solution of systems of differential equations, *Computer J.* **11**, 3 (November 1968).

ANNEXE I

On admet dans cette démonstration les hypothèses suivantes:

Δx^{*0} et Δy^{*0} sont des quantités positives

u_{0y}^{*0} reste toujours positives c'est à dire on admet qu'il n'y a pas de décollement.

dp^*/dx^* reste bornée quelle soit x^* .

Pour la clarté de l'exposé, on va considérer les équations physiques en coordonnées cartésiennes x^*, y^* . Dans ce cas les aux différences finies peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$u_{m-1,n}^* \frac{u_{m,n}^* - u_{m-1,n}^*}{\Delta x^*} + v_{mn}^* \frac{u_{m,n+1}^* - u_{m,n-1}^*}{2\Delta y^*} = \frac{1}{Re(\Delta y^*)^2} (u_{m,n+1}^* + u_{m,n-1}^* - 2u_{mn}^*) - \frac{dp^*}{dx^*}. \tag{1}$$

La démonstration de la stabilité est basée sur la théorie de von Neumann qui utilise la transformation de Fourier. Cette théorie valable pour les problèmes linéaires en général, est utilisée ici pour étudier le cas non linéaire comme il a déjà été fait par Richmeyer et Morton† pour l'étude des équations de diffusion non linéaires. On pose

$$u_{m,y^*}^* = \alpha_m e^{iky}$$

$$v_{m,y^*}^* = \beta_m e^{iky}.$$

α_m et β_m sont des fonctions complexes; l'équation (1) donne alors

$$\alpha_m \left\{ 1 + \frac{1}{u_{m-1,n}^*} \left[\frac{2\Delta x^*}{Re(\Delta y^*)^2} (1 - \cos k\Delta y^*) \right] - v_{mn}^* \sin k\Delta y^* \times \frac{\Delta x^*}{\Delta y^*} \right\} = \alpha_{m-1} - \frac{dp^*}{dx^*} \frac{\Delta x^*}{u_{m-1,n}^*}.$$

Le schéma proposé est stable si

$$1 + \frac{1}{|u_{m-1,n}^*|} \left[2 \frac{\Delta x^*}{Re(\Delta y^*)^2} (1 - \cos k\Delta y^*) - |v_{mn}^*| \sin(k\Delta y^*) \frac{\Delta x^*}{\Delta y^*} \right] \geq 1.$$

Or le minimum du terme qui se trouve à gauche du signe d'inégalité correspond à $\sin(k\Delta y^*) = 1$, par conséquent la condition de stabilité devient

$$\frac{2}{Re \Delta y^*} \geq |v_{mn}^*|.$$

La condition de stabilité de l'équation (1) étant respectée, on calcule $v_{m,n}^*$ à partir de l'équation de continuité. Ce calcul ne pose pas de problème puisque les $u_{m,n}^*$ sont bornés.‡

ANNEXE II

Sous forme de différences finies les équations d'énergie s'écrivent :

$$\beta \frac{d\theta_j^*}{dF_0} = \frac{2}{\Delta x_+^* (\Delta \tilde{x}_-^* + \Delta \tilde{x}_+^*)} (\theta_{i+1,j}^* - \theta_{ij}^*) + \frac{2}{\Delta x_-^* (\Delta \tilde{x}_-^* + \Delta \tilde{x}_+^*)} (\theta_{i-1,j}^* - \theta_{ij}^*) + \frac{r_{i,j+\frac{1}{2}} \theta_{i,j+1}^* - \theta_{ij}^*}{r_{ij} (\Delta \tilde{r}^*)^2} + \frac{r_{i,j-\frac{1}{2}} \theta_{i,j-1}^* - \theta_{ij}^*}{r_{ij} (\Delta \tilde{r}^*)^2} - RePr \left\{ \frac{v_{ij}^*}{2\Delta r^*} (\theta_{i,j+1}^* - \theta_{i,j-1}^*) + u_{ij}^* \frac{1}{\Delta x_-^* + \Delta x_+^*} \left[\frac{\Delta x_-^*}{\Delta x_+^*} (\theta_{i+1,j}^* - \theta_{ij}^*) - \frac{\Delta x_+^*}{\Delta x_-^*} (\theta_{i-1,j}^* - \theta_{ij}^*) \right] \right\} \tag{A.1}$$

$$\frac{dT_{ij}^*}{dF_0} = \frac{2}{\Delta \tilde{x}_+^* (\Delta \tilde{x}_-^* + \Delta \tilde{x}_+^*)} (T_{i+1,j}^* - T_{ij}^*) + \frac{2}{\Delta \tilde{x}_-^* (\Delta \tilde{x}_-^* + \Delta \tilde{x}_+^*)} (T_{i-1,j}^* - T_{ij}^*) + \frac{r_{i,j+\frac{1}{2}} (T_{i,j+1}^* - T_{ij}^*)}{r_{ij} (\Delta \tilde{r}^*)^2} + \frac{r_{i,j-\frac{1}{2}} (T_{i,j-1}^* - T_{ij}^*)}{r_{ij} (\Delta \tilde{r}^*)^2} \tag{A.2}$$

avec les conditions aux limites :

$$0 < x^* \leq \frac{L}{a_i} \left\{ \begin{aligned} K_\theta \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} &= K_r \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \\ r^* = 1 \quad \theta^* &= T^* \end{aligned} \right.$$

$$x^* = \frac{L}{a_i} \left\{ \begin{aligned} K_\theta \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} &= K_T \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = 0 \\ 0 \leq r^* < \frac{a_{cx}}{a_i} \end{aligned} \right.$$

† R. D. RICHTMEYER and K. W. MORTON, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2nd edn. John Wiley, New York.

‡ C. LUH-SUN FARN, V. S. ARPACI and JOHN A. CLARK, A finite difference method for computing unsteady, incompressible, laminar boundary layer flows, ARL 66-0010, Part III (1966).

$$\begin{aligned}
 0 < x^* \leq \frac{L}{a_i} & \left\{ \begin{array}{l} K_\theta \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = 0 \\ r^* = 0 \end{array} \right. \\
 x^* = 0 & \left\{ \begin{array}{l} \theta^* = 0 \\ 0 < r^* < 1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Conditions initiales :

$$\begin{aligned}
 0 < r^* < \frac{L}{a_i} & \left\{ \begin{array}{l} \theta^*(0, x^*, r^*) = \theta^0(x^*, r^*) \\ T^*(0, x^*, r^*) = T^0(x^*, r^*) \end{array} \right. \\
 0 < x^* < \frac{a_{ex}}{a_i} & \left\{ \begin{array}{l} T^*(0, x^*, a_{ex}) = T_p. \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

On considère maintenant un réseau électrique composé de résistances et de condensateurs. Si on désigne par R_{ij} la résistance qui relie le noeud i au noeud j on doit avoir

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

On multiplie les deux membres de l'équation (A.1) par

$$\frac{(\Delta x_{-}^* + \Delta x_{+}^*) \Delta r^*}{2}$$

et ceux de l'équation (A.2) par

$$\frac{(\Delta \tilde{x}_{-}^* + \Delta \tilde{x}_{+}^*) \Delta \tilde{r}^*}{2}.$$

Les résistances constituant le réseau simulant T seront :

$$\begin{aligned}
 R_{+}^{\text{axiale}} &= \frac{\Delta \tilde{x}_{+}^*}{r_{ij}^* \Delta \tilde{r}^*} R_T \\
 R_{-}^{\text{axiale}} &= \frac{\Delta \tilde{x}_{-}^*}{r_{ij}^* \Delta \tilde{r}^*} R_T \\
 R_{j+\frac{1}{2}}^{\text{radiale}} &= \frac{2\Delta \tilde{r}^*}{(r_{ij}^* + \Delta \tilde{r}^*/2)(\Delta \tilde{x}_{-}^* + \Delta \tilde{x}_{+}^*)} R_T \\
 R_{j-\frac{1}{2}}^{\text{radiale}} &= \frac{2\Delta \tilde{r}^*}{(r_{ij}^* - \Delta \tilde{r}^*/2)(\Delta \tilde{x}_{-}^* + \Delta \tilde{x}_{+}^*)} R_T.
 \end{aligned}$$

En comparant l'équation aux différences finies (A.2) avec l'équation électrique du réseau (T^*), on obtient la première condition :

$$R_T C_T = \frac{I_a}{F_0}. \quad (\text{A.3})$$

De même, on a :

$$R_\theta C_\theta = \beta \frac{I_a}{F_0}. \quad (\text{A.4})$$

Regardons maintenant les conditions aux limites pour $r^* = 1, 0 < x^* < L/a_i$ on a :

$$K_\theta \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = K_T \frac{\partial T^*}{\partial r^*}$$

$$\theta^* = T^*$$

La réalisation de ces conditions peut être directe si on relie point par point la frontière du réseau (T^*) à celle de (θ^*) à condition de satisfaire les relations suivantes :

$$\frac{R_\theta \Delta r^*}{R_T \Delta \bar{r}^*} = \frac{K_T}{K_\theta}$$

En effet on a :

$$i_1 = - \frac{1}{R_\theta \Delta r^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} \quad i_2 = - \frac{1}{R_T \Delta \bar{r}^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}$$

La liaison directe des deux réseaux entraîne $i_1 = i_2$, soit

$$\frac{1}{R_\theta \Delta r^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = \frac{1}{R_T \Delta \bar{r}^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}$$

La condition

$$K_\theta \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = K_T \frac{\partial T^*}{\partial r^*}$$

est automatiquement vérifiée si on a :

$$\frac{R_\theta \Delta r^*}{R_T \Delta \bar{r}^*} = \frac{K_T}{K_\theta} \tag{A.5}$$

Les trois relations (A.3)-(A.5) permettent donc de calculer les valeurs de R, C des réseaux (θ^*), (T^*) connaissant $\beta, t_a/F_\theta, K_T/K_\theta, \Delta r^*, \Delta \bar{r}^*$ choisis.

Si on pose

$$R_{ij}^* = R_\theta X_{ij}$$

on aura :

$$\frac{\bar{\theta}_{ij} - \theta_{ij}^*}{X_{ij}} = - RePr r_{ij}^* \left\{ v_{ij}^* \frac{\theta_{i,j+1}^* - \theta_{ij-1}^*}{2\Delta r^*} + \frac{u_{ij}^*}{\Delta x_-^* + \Delta x_+^*} \times \left[\frac{\Delta x_-^*}{\Delta x_+^*} \theta_{i+1,j}^* - \frac{\Delta x_+^*}{\Delta x_-^*} \theta_{i-1,j}^* + \left(\frac{\Delta x_+^*}{\Delta x_-^*} - \frac{\Delta x_-^*}{\Delta x_+^*} \right) \theta_{ij}^* \right] \right\}$$

On fixe la valeur de X_{ij} et on calcule $\bar{\theta}_{ij}$ à partir de cette formule.

TIME DEPENDENT HEAT TRANSFER IN LAMINAR FLOW AT THE ENTRANCE REGION OF CIRCULAR TUBES

Abstract— A method of simulation and study of time dependent heat-transfer phenomenon at the entrance region of circular tubes is proposed. It allows the processing of nonlinear dynamic equations and energy equations in which the thickness of the tube and the fluid axial conductivity are taken into account. It is based on three different computing processes: the numerical method whose stability is proved, gives an exact solution for dynamic equations, the two analog computing methods using electric network and direct current yield the simulation of the energy equations. Thus it makes possible the analysis of transfer problems even in the cases when Prandtl number is small (<0.5) and Péclet number inferior to 100.

ZEITABHÄNGIGE WÄRMEÜBERTRAGUNG BEI LAMINARER STRÖMUNG IM EINTRITTSBEREICH KREISFÖRMIGER ROHRE

Zusammenfassung—Es wird eine Methode zur Nachbildung und zum Studium zeitabhängiger Wärmeübertragungsvorgänge im Eintrittsbereich kreisförmiger Rohre vorgeschlagen, Sie erlaubt die

Behandlung nichtlinearer Bewegungs- und Energiegleichungen, in denen der Rohrdurchmesser und die Leitfähigkeit des Mediums in axialer Richtung berücksichtigt werden, und beruht auf 3 verschiedenen Berechnungsmethoden: Die numerische Methode, deren Stabilität geprüft wird, gibt eine exakte Lösung der Bewegungsgleichungen, die beiden Analog-Rechenmethoden, die die elektrische Netzwerk-Analogie und die direkte Analogie zwischen Wärmestrom und elektrischem Strom benützen, liefern die Simulation der Energiegleichungen. Auf diese Weise ist es möglich, die Analyse von Übertragungsproblemen sogar für kleine Prandtl-Zahlen (< 0.5) und Péclet-Zahlen kleiner als 100 durchzuführen.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВО ВХОДНОМ УЧАСТКЕ КРУГЛЫХ ТРУБ

Аннотация—Предложен метод моделирования и исследования нестационарного теплообмена во входном участке круглых труб. Метод позволяет решать нелинейные уравнения и уравнения движения и энергии, в которых учитываются толщина трубы и теплопроводность жидкости по оси. Метод основан на трех различных численных процедурах: численном методе, устойчивость которого доказана, дающем точное решение уравнений движения, и двух аналоговых численных методах, использующих электрическую сетку и постоянный ток, моделирующих уравнения энергии. Таким образом, этот метод дает возможность проводить анализ задач тепло-и массообмена даже в случаях небольших чисел Прандтля (0,5) и чисел Пекле до 100.